

7. Учбурчакнинг учлари берилган: $M_1(2, 1)$, $M_2(-1, -1)$ ва $M_3(3, 2)$. Учбурчакнинг баландликлари тенгламаларини тузинг.

$$\text{Ж: } 4x + 3y - 11 = 0, \quad x + y + 2 = 0, \quad 3x + 2y - 13 = 0.$$

8- §. Текисликлар ва тўғри чизикларнинг ўзаро жойлашуви.
Текисликлар орасидаги бурчак. Тўғри чизиклар орасидаги бурчак.
Нуктадан тўғри чизиккача ва текисликкача бўлган масофа

1.8.1. Текисликлар $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак қуйидаги формула асосида ҳисобланади:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

бунда $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ — берилган текисликларнинг нормал векторлари.

а) Агар текисликлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ёки $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

б) Агар текисликлар параллел бўлса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

в) Агар текисликлар устма-уст тушса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

г) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликкача бўлган d масофа:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

формула бўйича ҳисобланади.

1.8.2. Тўғри чизиклар

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

ва

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

каноник тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу тўғри чизиклар орасидаги φ бурчак қуйидаги формуладан топилади:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}.$$

а) Агар тўғри чизиклар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ ёки $l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$.

б) Агар тўғри чизиклар параллел бўлса, у ҳолда $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

в) Агар тўғри чизиклар устма-уст тушса, у ҳолда $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$,
шу билан бирга

$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}.$$

г) Агар тўғри чизиклар кесишса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

д) Агар тўғри чизиклар айкаш бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуктадан $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$ тўғри чизиккача бўлган масофа қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1 M_0}|}{|\vec{s}|},$$

бунда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нукта шу тўғри чизикка тегишли ва $\vec{s} = \{l, m, p\}$ унинг йўналтирувчи вектори.

Икки айкаш

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ ва } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

тўғри чизиклар орасидаги энг қисқа d масофа қуйидагича аниқланади:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

бунда $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нукталар мос равишда бу тўғри чизикларга тегишли, $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, p_1\}$ ва $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, p_2\}$ лар эса уларнинг йўналтирувчи векторлари.

Мисол. $x - 2y + 2z - 8 = 0$ ва $x + z - 6 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Е чи ш. Икки текислик орасидаги бурчак формуласига кўра:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 - C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бундан $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ келиб чиқади.

1.8.3. $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик билан $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизик орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}},$$

бунда $\vec{n} = \{A, B, C\}$ — текисликнинг нормал вектори, $\vec{s} = \{l, m, p\}$ — тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори.

а) Агар текислик билан тўғри чизик перпендикуляр бўлса, $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар коллинеар ёки $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$ бўлади.

б) Агар текислик билан тўғри чизик параллел бўлса, у ҳолда $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар перпендикуляр ёки $Al + Bm + Cp \neq 0$ бўлади.

в) Агар текислик билан тўғри чизик устма-уст тушса, у ҳолда $Al + Bm + Cp = 0$, шу билан бирга $Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$ бўлади.

г) Агар текислик билан тўғри чизик кесишса, у ҳолда

$$Al + Bm + Cp \neq 0.$$

1.8.4. Текисликдаги тўғри чизиклар

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

бунда $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ — мос равишда берилган тўғри чизикларнинг нормал векторлари.

а) Агар бу тўғри чизиклар ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

б) Агар бу тўғри чизиклар параллел бўлса, у ҳолда

$$A_1/A_2 = B_1/B_2.$$

в) Агар бу тўғри чизиклар устма-уст тушса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Текисликдаги тўғри чизиклар

$$y = k_1x + b_1 \text{ ва } y = k_2x + b_2$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Бу тўғри чизикларнинг перпендикулярлик шarti $k_1 \cdot k_2 = -1$ дан иборат, параллеллик шarti эса $k_1 = k_2$ бўлади.

$M_0(x_0, y_0)$ нуктадан $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиккача бўлган d масофа ушбу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

8-дaр'с хoна тoпшириғи

1. Координаталар бошидан ўтувчи $2x - y + 3z - 1 = 0$ ва $x + 2y + z = 0$ текисликларга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $7x - y - 5z = 0$.

2. $P(-1, 1, -2)$ нуктадан $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 3)$ ва $M_3(4, -5, -2)$ нукталар оркали ўтувчи текисликкача бўлган d масофани ҳисобланг.

Ж: $d = 4$ узун. бирл.

3. Ушбу

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиклар орасидаги φ бурчак косинусини ҳисобланг.

Ж: $\cos \varphi = \pm \frac{4}{21}$.

4. Тўғри чизик билан текисликнинг ўзаро ҳолатини аниқланг, улар кесишган ҳолда, кесишиш нуктаси координаталарини топинг:

$$\text{a) } \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}, \quad 3x - 3y + 2z - 5 = 0,$$

$$\text{б) } \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}, \quad x + 2y - 4z + 1 = 0,$$

$$\text{в) } \frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}, \quad 3x - y + 2z - 5 = 0.$$

Ж: а) параллел; б) тўғри чизик текисликда ётади; в) $M(2, 3, 1)$

нуқтада кесишади.

5. $M_1(5, 4, 6)$ ва $M_2(-2, -17, -8)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизикка нисбатан $P(2, -5, 7)$ нуқтага симметрик Q нуқтани топинг.

Ж: $Q(4, -1, -3)$.

6. Учбурчакнинг $A(-10, -13)$ ва $B(-2, 3)$ учлари берилган. Унинг C учидан AB томонга ўтказилган медианасига B учидан туширилган перпендикуляр узунлигини ҳисобланг.

Ж: 4 узун, бирл.

8- мустақил иш

1. $M_1(1, -1, 2)$ ва $M_2(3, 1, 1)$ нуқталардан ўтувчи $x - 2y + 3z + 5 = 0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $4x - y - 2z - 9 = 0$.

2. Ушбу тўғри чизикларнинг перпендикулярлигини исботланг:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

3. Ушбу

$$2x - 3y + 6z - 14 = 0 \quad \text{ва} \quad 4x - 6y + 12z + 21 = 0$$

текисликлар орасидаги d масофани ҳисобланг.

Ж: $d = 3,5$ узунлик бирлиги.

4. Ушбу

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{ва} \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

тўғри чизиклар l нинг қандай қийматида кесишади?

Ж: $l = 3$.

5. Ушбу

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{ва} \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$$

тўғри чизиклар орасидаги энг қисқа масофани ҳисобланг.

Ж: 13 узунлик бирлиги.

6. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизикдан ўтувчи ва $x + 4y - 3z + 7 = 0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.